UNIVERSITY OF BUCHAREST

HABILITATION THESIS

Hardy inequalities, asymptotic and control properties of evolution equations

CRISTIAN-MIHAI CAZACU

Specialization: Mathematics

UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI
VIRTUTE ET SAPIENTIA

Bucharest, 2018

Rezumat

Ecuațiile cu derivate parțiale (EDP) sunt larg răspândite în matematică și în științe, oferind unul dintre cele mai importante instrumente matematice pentru teoriile fizice, cum ar fi elasticitatea, hidrodinamica, electromagnetismul, optica și mecanica cuantică.

În această teză discutăm și analizăm diferite probleme de EDP care reflectă principalele contribuții științifice pe care le-am obținut în ultimii ani. Un accent deosebit este acordat aspectelor teoretice ale EDP, cu scopul de a sublinia proprietăți importante ale soluțiilor, ca, de exemplu, buna definire a unei probleme, comportamentul asimptotic, proprietăți de controlabilitate pentru ecuații locale, nelocale și ecuații pe rețele. Mai mult, deducem inegalități de tip Hardy importante pentru studiul ecuațiilor cu coeficienți singulari.

Această teză constă în trei părți principale ale căror separare și structură vor fi detaliate în cele ce urmează.

Prima parte (Capitolul 1) se bazează pe aspecte introductive care subliniază trei trăsături relevante: un scurt rezumat al evoluției academice a candidatului, autonomia în cercetare și principalele realizări științifice obținute în timpul studiilor de doctorat materializate în lucrările publicate [2, 3, 4, 5, 10].

Cea de-a doua parte este compusă din patru capitole (Capitolele 2, 3, 4 și 5) care formează cea mai importantă parte a tezei de abilitare, incluzând rezultatele științifice principale obținute de candidat în ultimii trei ani, fundamentate în articolele [6, 9, 7] respectiv [8] (menționăm faptul că am evitat să includem în această teză orice fel de rezultate a căror cercetare a început în perioada de elaborare a tezei de doctorat și au fost finalizate și publicate după obținerea diplomei de doctor în septembrie 2012, situație în care se găsesc lucrările [10, 5]).

Partea a treia (Capitolul 6) conține perspective viitoare, incluzând un plan pentru direcții posibile de cercetare și câteva probleme deschise.

Rezultatele celei de-a doua părți acoperă trei paliere principale: i) inegalități de tip Hardy, ii) proprietăți de comportament asimptotic pentru ecuațiile de evoluție (cu coeficienți singulari sau cu termeni nelocali), iii) probleme de controlabilitate pentru ecuații pe arbori in formă de stea. Mai precis, vom rezuma principalele noastre contribuții după cum urmează.

1. Inegalităţi Hardy multipolare.

În Capitolul 2, ne ocupăm de inegalități Hardy multipolare. Aceste rezultate fac parte din lucrarea [6] în care am studiat în principal optimalitatea constantei $\mu^\star(\Omega)$ în inegalitatea multipolară Hardy

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \mu^\star(\Omega) \int_\Omega V|u|^2 \mathrm{dx} \geq 0, \quad \forall u \in C_c^1(\Omega),$$

($\mu^\star(\Omega)$ denotă cea mai mare constantă posibilă a inegalității de mai sus) asociată potențialului

$$V(x) := \sum_{1\leq i<j\leq n} \frac{|x_i - x_j|^2}{|x-x_i|^2|x-x_j|^2},$$

cu $n \geq 2$ poli singulari $x_1, \dots, x_n$, în domenii $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.

Într-o colaborare cu E. Zuazua am arătat anterior în [10] că $\mu^\star(\mathbb{R}^d) = (d-2)^2/n^2$.

Prin adaptarea metodei introduse de Agmon-Allegretto-Piepenbrick (cf. [1]) în cazul problemei noastre specifice, pentru a demonstra inegalitățile funcționale, în Capitolul 2 rafinăm și extindem rezultatele obținute în [10] în felul următor: dacă $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ este un domeniu mărginit cu singularități interioare demonstrăm că există un salt calitativ în constanta Hardy (și anume $\mu^\star(\Omega) > \mu^\star(\mathbb{R}^d)$ dacă și numai dacă potențialul V nu este bipolar, adică $n \geq 3$, în timp ce, în cazul bipolar, ambele constante coincid, adică $\mu^\star(\Omega) = \mu^\star(\mathbb{R}^d)$. În plus, în cazul singularităților localizate pe frontiera $\partial\Omega$ a lui Ω, obținem o îmbunătățire a constantei Hardy. Mai concret, dacă toți polii singulari sunt situați pe frontiera unei bile B atunci $\mu^\star(B) = d^2/n^2$. Noutatea majoră aici constă în atingerea celei mai bune constante Hardy pe o bilă. Această caracteristică a atingerii nu este comună pentru inegalitățile Hardy în domenii convexe.

2. Inegalitatea Hardy magnetică și proprietăți asimptotice pentru ecuația căldurii.

Rezultatele Capitolului 3 au la bază articolul [9], care reprezintă o colaborare cu D. Krejčiřík. În acest capitol considerăm semigrupul de căldură generat de operatorul magnetic de tip Schrödinger (Hamiltonian), din care extragem un potențial singular pătratic pentru a obține un operator critic, adică $H_B := (-i\nabla_x - A(x))^2 - (d-2)^2/(4|x|^2)$.

În acest caz, A este un câmp potențial (1-formă) și B este un tensor magnetic (2-form) astfel încât A și B sunt legate prin derivata exterioară, adică $B = \mathrm{d}A$. Se demonstrează proprietăți asimptotice importante și surprinzătoare ale semigrupului asociat e^{-tH_B} în $L^2(\mathbb{R}^d)$, $d \geq 2$.

Mai exact, demonstrăm în Capitolul 3 că există o inegalitate Hardy îmbunătățită în prezența câmpurilor magnetice netriviale. Spre deosebire de operatorul critic $H_0 = -\Delta - (d-2)^2/(4|x|^2)$ (corespunzător lui $B \neq 0$), operatorul H_B devine subcritic în sensul că forma pătratică asociată este mărginită inferior de norma L^2 cu o pondere logaritmică. Totuși, în dimensiuni superioare $d \geq 3$, această îmbunătățire a inegalității magnetice Hardy nu este vizibilă în comportamentul asimptotic la nivelul ratelor polinomiale de descreștere ale semigrupului generat de H_B în comparație cu H_0. Într-adevăr, presupunând câmpul magnetic B de suport compact, probăm că în cazul 2-d are loc o îmbunătăţire a ratei de descreştere a semigrupului căldurii $\partial_t u + H_B u = 0$ cu un factor polinomial de putere proporțională cu distanţa fluxului magnetic total la mulţimea discretă de flux cuantic, extinzând rezultate parțiale obținute anterior în [15]. În schimb, în dimensiuni superioare $d \geq 3$ nu are loc o îmbunătăţire a acestei rate de descreştere polinomială în raport cu câmpul magnetic trivial $B = 0$.

Demonstrațiile fac apel la inegalitatea Hardy magnetică, transformări auto-similare și câștig în compacitate, care permit reducerea problemei la o analiză spectrală pentru operatori de tipul oscilatorului armonic.

3. Proprietăţi asimptotice pentru ecuații nelocale.

În Capitolul 4 expunem rezultatele unei colaborări cu L. Ignat și A. Pazoto concretizate în articolul [7]. În acest capitol analizăm o ecuație de convecție-difuzie cu difuzie nelocală și termen convectiv local de tipul $u_t = Lu - |u|^{q-1}u_x$, unde $1 < q$ și L este un operator nelocal de forma $(Lu)(x) = \int_{\mathbb{R}} J(x-y)(u(y) - u(x))dy$.

Această problemă a fost analizată și rezolvată anterior în cazurile critic și supercritic $q \geq 2$, în [14, 16] unde se obține primul termen în dezvoltarea asimptotică al cărui profil este dat de soluția unei ecuații de tip Burgers, respectiv a căldurii cu date inițiale de tip delta lui Dirac.

În Capitolul 4 extindem rezultatele asimptotice anterioare la cazul subcritical $1 < q < 2$ probând că, atunci când timpul tinde la infinit, comportamentul asimptotic este dat de termenul de convecție, în timp ce termenul de difuzie poate fi neglijat, așa cum se întâmplă în cazul problemei locale [12].

Demonstrația noastră se bazează pe inegalități de tip Oleinik, metode de scalare și argumente de compacitate.

4. Controlabilitate nulă pentru ecuația Kuramoto-Shivasinsky pe arbori stelați.

Rezultatele din Capitolul 5 se bazează, de asemenea, pe o lucrare în colaborare cu L. Ignat și A. Pazoto [8], considerând ecuația Kuramoto-Shivashinsky (KS) $y_t + \lambda y_{xx} + y_{xxxx} = 0$, $\lambda > 0$. Ecuația KS a fost studiată recent în [11], unde autorul a probat rezultate privind controlabilitatea nulă pe un interval atunci când parametrul antidifuzare λ nu aparține unui un număr critic de numere reale, acționând cu un control într-un punct extrem al intervalului.

În acest capitol extindem studiul controlabilității nule din [11] la un sistem de ecuații cu condiții de cuplare într-un punct. Mai exact, considerăm un sistem de ecuații KS pe un arbore stelat cu muchii de aceeași lungime atât atât cu condiții de frontieră de tip Dirichlet cât și de tip Neumann. Folosind un număr minim (optim) de controale de frontieră care acționează asupra vârfurilor externe ale arborelui, demonstrăm rezultate de controlabilitate nulă pentru orice $\lambda > 0$, cu excepția unei mulțimi numărabile de valori reale.

Demonstrația noastră folosește metoda momentelor în spiritul lui [13] și proprietăți spectrale detaliate ale operatorilor compacți corespunzători pe arbori stelați unde ne-am confruntat cu dificultăți tehnice din cauza prezenței unor valori proprii cu multiplicitate mai mare decât 1.

Bibliografie

[1] W. Allegretto, *On the equivalence of two types of oscillation for elliptic operators*, Pacific J. Math. **55** (1974), 319–328.

[2] C. Cazacu, *Hardy inequality and Pohozaev identity for operators with boundary singularities: some applications*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **349** (2011), no. 21-22, 1167–1172.

[3] C. Cazacu, *On Hardy inequalities with singularities on the boundary*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **349** (2011), no. 5-6, 273–277.

[4] C. Cazacu, *Schrödinger operators with boundary singularities: Hardy inequality, Pohozaev identity and controllability results*, J. Funct. Anal. **263** (2012), no. 12, 3741–3783.

[5] C. Cazacu, *Controllability of the Heat Equation with an Inverse-Square Potential Localized on the Boundary*, SIAM J. Control Optim. **52** (2014), no. 4, 2055–2089.

[6] C. Cazacu, *New estimates for the Hardy constants of multipolar Schrödinger operators*, Commun. Contemp. Math. **18** (2016), no. 5, 1550093, 28.

[7] C. Cazacu, L. I. Ignat, and A. F. Pazoto, *On the asymptotic behavior of a subcritical convection-diffusion equation with nonlocal diffusion*, Nonlinearity **30** (2017), no. 8, 3126–3150.

[8] C. Cazacu, L. I. Ignat, and A. P. Pazoto, *Null-controllability of the Kuramoto-Sivashinsky equation on star-shaped trees*, SIAM J. Control Optim.,to appear.

[9] C. Cazacu and D. Krejčiřík, *The Hardy inequality and the heat equation with magnetic field in any dimension*, Comm. Partial Differential Equations **41** (2016), no. 7, 1056–1088.

[10] C. Cazacu and E. Zuazua, *Improved multipolar Hardy inequalities*, Studies in Phase Space Analysis of PDEs, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, vol. **84**, Birkhäuser, 2013, pp. 37–52.

[11] E. Cerpa, *Null controllability and stabilization of the linear Kuramoto-Sivashinsky equation*, Commun. Pure Appl. Anal. **9** (2010), no. 1, 91–102.

[12] M. Escobedo, J. L. Vázquez, and E. Zuazua, *Asymptotic behaviour and source-type solutions for a diffusion-convection equation*, Arch. Ration. Mech. Anal. **124** (1993), 43–65.

[13] H. O. Fattorini and D. L. Russell, *Exact controllability theorems for linear parabolic equations in one space dimension*, Arch. Rational Mech. Anal. **43** (1971), 272–292.

[14] L. I. Ignat and A. F. Pazoto, *Large time behaviour for a nonlocal diffusion—convection equation related with gas dynamics*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **34** (2014), no. 9, 3575–3589.

[15] D. Krejčiřík, *The improved decay rate for the heat semigroup with local magnetic field in the plane*, Calc. Var. Partial Differ. Equ. **47** (2013), 207–226.

[16] P. Laurençot, *Asymptotic self-similarity for a simplified model for radiating gases.*, Asymptotic Anal. **42** (2005), no. 3-4, 251–262.