Habilitation thesis

Grigore - Marius Vlădoiu

Facultatea de Matematică şi Informatică

Universitatea din Bucureşti

January 2018

Rezumat

Domeniile mele de interes ştiinţific sunt: algebra comutativă, algebră computaţională, algebra comutativă combinatorială şi combinatorica (teoria (hiper)grafurilor şi teoria matroizilor). Problemele pe care le studiez sunt în general interdisciplinare, atât teoretice cât şi aplicate, şi folosesc metode de algebră omologică, geometrie poliedrală, combinatorică şi algebră computaţională în rezolvarea/investigarea lor.

Mi-am scris teza de doctorat ”Metode algebrice şi computaţionale în algebra comutativă” sub îndrumarea domnului Prof. dr. Dorin Popescu, am susţinut-o public pe 30 aprilie 2004, şi am obţinut titlul de doctor în matematică în august 2004.

După obţinerea titlului de doctor în 2004 am fost autor sau co-autor a 14 lucrări, dintre care 12 sunt deja publicate în jurnale ISI, şi 2 sunt submise spre publicare în jurnale ISI. În prezent am încă 5 lucrări în pregătire, dintre care 3 sunt foarte avansate, şi parte din rezultatele lor sunt parţial descrise în planurile de cercetare de viitor. Lucrările mele au fost publicate în jurnale ISI precum: Journal of Algebra, Journal of Pure and Applied Algebra, Communications in Algebra, Annals of Combinatorics, Proceedings of the American Mathematical Society, Journal of Algebraic Combinatorics, Electronic Journal of Combinatorics, Collectanea Mathematica şi Journal of Symbolic Computation.

Pot împărţi lucrările mele scrise după obţinerea doctoratului după două mari direcţii, dar cu rezultate care au aplicaţii/implicaţii în: algebra comutativă, algebra comutativă combinatorială, combinatorică, statistică algebrică, programare întreagă, algebră computaţională şi geometrie algebrică. Cele două mari direcţii de cercetare în care am plasat lucrările mele sunt următoarele:

1. Ideale monomiale: invarianţi algebrici, omologici şi combinatoriali; aplicaţii în combinatorică, politopi convecşi, teoria matroizilor, teoria grafurilor. ([93, 95, 103, 101, 102, 151, 183, 184])

2. Ideale binomiale: proprietăţi omologice, combinatorice şi aspecte computaţionale, aplicaţii în: statistica algebrică, combinatorica (geometrică), programare întreagă, geometrie algebrică. ([38, 39, 40, 41, 146, 147])

Această teză, care conţine aproape toate rezultatele din lucrările mai sus menţionate, este organizată astfel: are două părţi corespunzătoare celor două direcţii de mai sus, conţine 6 capitole cu rezultate din lucrări şi încă un (mini-)capitol cu direcţiile mele viitoare de cercetare. În continuare voi prezenta pe scurt cele mai importante rezultate din teză.

În lucrarea [103], vezi primul capitol pentru detalii, dăm un algoritm pentru calculul invariantului combinatorial sdepth în cazul câturilor de ideale monomiale I/J. Algoritmul arată că acest invariant poate fi calculat considerând partiţiile (în număr finit) unor poseturi finite în intervale. Motivaţia unui astfel de algoritm de calcul a sdepth-ului a reprezentat-o o conjectură a lui Stanley din 1982 care afirma că $\operatorname{sdepth}(M) \geq \operatorname{depth}(M)$ pentru orice S-modul finit generat $\mathbb{Z}^n$-graduat M. Impactul acestei lucrări a fost incredibil (având deja peste 90 de citări) deoarece algoritmul de calcul al sdepth-ului pentru câturi de ideale monomiale a stat la baza a numeroase lucrări în care s-au demonstrat cazuri particulare ale conjecturii. Însă, recent, în [59], autorii au găsit un contraexemplu al acestei conjecturi, dar şi al unei alte conjecturi faimoase de-ale lui Stanley (din combinatorică) care afirmă: complexele simpliciale Cohen-Macaulay sunt partiţionabile.

O clasă particulară de ideale monomiale este reprezentată de idealele polimatroidale. Aceste ideale apar natural în combinatorică (sunt ideale monomiale asociate mulţimii bazelor unui polimatroid discret, o extindere a noţiunii de matroid) şi au multe proprietăţi algebrice şi omologice remarcabile, din care selectez faptul că au (împreună cu toate puterile lor) rezoluţii liniare. În lucrarea [95], vezi al doilea capitol pentru detalii, sunt studiate idealele prime asociate puterilor idealelor polimatroidale, incluzând mulţimea stabilă a primelor asociate, dar şi funcţia depth a acestor ideale. Se demonstrează că idealele polimatroidale au proprietatea de persistenţă, iar pentru ideale asociate polimatroizilor transversali, precum şi pentru cei de tip Veronese sunt calculaţi indecşii de stabilitate, dar şi mulţimea stabilă de prime asociate. În particular, dăm răspunsuri complete la întrebări puse de Eisenbud [64], respectiv Conca şi Herzog [48], privitor la structura primelor asociate şi descompunerilor primare ale idealelor polimatroidale asociate polimatroizilor transversali (şi puterilor lor), şi în plus calculăm numeroşi invarianţi ai acestora.

Studiul (detaliat) al idealelor binomiale, şi în particular al idealelor laticiale şi torice a fost iniţiat cu lucrarea fundamentală a lui Eisenbud şi Sturmfels, vezi [67]. În capitolul 3, care conţine mai ales rezultate din [41], descriem mulţimile minimale de generatori binomiali şi invarianţii lor. Una din principalele motivaţii a acestui studiu este problema caracterizării tuturor idealelor laticiale care sunt (binomial) intersecţie completă, problemă considerată încă din anii 70 şi care este încă deschisă în cazul cel mai general. Pentru latici pozitive, problema a fost gradual rezolvată într-o serie de lucrări începând în 1970 cu [81] şi încheindu-se în 2005 cu [131], cu o contribuţie substanţială adusă de [69]. Chiar dacă pentru latici pozitive clasa idealelor laticiale intersecţie completă este aceeaşi cu cea a idealelor laticiale (binomial) intersecţie completă, această problemă este în continuare deschisă pentru latici care nu sunt pozitive. Mai mult, laticile care nu sunt pozitive sunt mult mai greu de studiat faţă de cele pozitive. Studiul nostru din [41] are în vedere cazul general al laticilor (pozitive sau nu) şi aduce un plus substanţial în studiul idealelor laticiale asociate laticilor care nu sunt pozitive. Ca o principală aplicaţie a acestui studiu putem caracteriza idealele laticiale care sunt binomial intersecţie completă, răspunzând astfel acestei probleme vechi deschise pentru cazul laticelor care nu sunt pozitive. Această teorie pe care o dezvoltăm pentru ideale laticiale arbitrare are aplicaţii interesante, descrise în capitolul al şaselea. Una dintre ele o reprezintă calculul complexităţii Markov (un invariant important în statistica algebrică) a curbelor monomiale din $\mathbb{A}^3$, răspunzând astfel la o întrebare pusă de Santos şi Sturmfels în [158], dar şi un, surprinzător, algoritm în timp polinomial pentru calculul binoamelor indispensabile ale unui ideal binomial oarecare dat de un sistem oarecare de binoame generatoare. Acest algoritm depăşeşte cu mult cei 3 algoritmi cunoscuţi înainte (niciunul dintre ei nefiind în timp polinomial), şi este valabil pentru orice ideal binomial şi nu doar pentru idealele laticiale pozitive. Suportul teoretic al acestui algoritm se bazează pe studiul geometriei fibrelor ataşate unui ideal binomial, care extinde natural şi se bazează în mod esenţial pe studiul fibrelor făcut de noi pentru ideale laticiale oarecare. Merită menţionat că răspunsul privind calculul complexităţii Markov pentru curbe monomiale în $\mathbb{A}^3$ (care este 2 dacă e intersecţie completă şi 3, în caz contrar) se bazează pe descrierea algebrică a bazei Markov universale, dată în [38]. În particular, această descriere reprezintă un nou şi puternic instrument pentru înţelegerea acestui misterios invariant, complexitatea Markov, care este cunoscut doar în cazuri rare.

În capitolele cinci şi şase, sunt reproduse rezultatele din lucrările [146], respectiv [147], în care dăm o clasificare combinatorială a tuturor idealelor torice bazată pe structura de "buchete" pe care o introducem în [146] precum şi aplicaţiile acesteia în rezolvarea câtorva probleme deschise în [146, 147]. Oricărui ideal toric I_A, dat de o matrice întreagă A, îi asociem o structură de matroid numită *graful "buchet"* al lui A şi ale cărui tipuri (mixte, non-mixte, libere) de componente conexe ("buchete") joacă un rol important în clasificarea noastră. De exemplu, unul din cazurile mari ale acestei clasificări corespunde idealelor pe care le numim *stabile*, pentru care "buchetele" (non-mixte) surprind atât rezoluţia liberă minimală cât şi complexitatea diverselor mulţimi speciale de binoame prin trecerea la idealul "buchet". La celălalt capăt al acestei clasificări se află idealele torice ale căror buchete sunt toate mixte, pentru care se demonstrează că diverse mulţimi speciale de binoame (e.g., mulţimi minimale de generatori, baza universală Gröbner, baza Graver) coincid. Pe lângă aceste rezultate obţinute ca urmare a acestei clasificări combinatoriale "buchetele" oferă şi un mod constructiv de a produce exemple de ideale torice cu diverse proprietăţi interesante, precum cele robuste, generice sau unimodulare. În particular, răspundem parţial unei probleme puse de Miller şi Sturmfels [130] privind construcţia explicită a idealelor torice generice cu proprietăţi algebrice prestabilite. De asemenea, cadrul general al "buchetelor" poate fi utilizat pentru caracterizarea idealelor torice pentru care baza Graver, baza Gröbner universală, orice bază Gröbner redusă şi orice mulţime minimală de generatori coincid, o problemă deschisă în algebra comutativă combinatorială. Prin restricţionarea la hipergrafuri a acestei teorii (i.e. considerarea matricelor întregi care pot fi realizate ca matrice de incidenţă a hipergrafurilor), conţinutul celui de-al şaselea capitol, obţinem un comportament neaşteptat al idealelor torice arbitrare, nu neapărat pozitiv graduate. Primul rezultat important spune, pe scurt, că proprietăţile combinatorice esenţiale ale idealelor torice arbitrare sunt "capturate" de idealele torice ale hipergrafurilor aproape 3-uniforme. Cu alte cuvinte, înţelegerea proprietăţilor combinatorice esenţiale ale idealelor torice asociate matricelor cu intrări doar 0 şi 1, şi care au cel mult trei de 1 pe fiecare coloană implică, via teoria noastră, înţelegerea proprietăţilor combinatorice esenţiale ale idealelor torice arbitrare. Al doilea rezultat important îl reprezintă un tip de polarizare, care spune că pentru orice ideal toric pozitiv graduat există un ideal toric stabil al unui hipergraf care are aceeaşi complexitate combinatorială ca idealul toric de la care se pleacă. Idealele torice stabile, introduse şi studiate în [146], sunt acele ideale torice pentru care trecerea la idealul "buchet" păstrează toată informaţia combinatorială şi, în plus, în cazul idealelor pozitiv graduate, păstrează şi informaţia omologică.

Rezultatele acestor lucrări, care sunt cuprinse în această teză, au fost prezentate la conferinţe internaţionale, două şcoli prestigioase (P.R.A.G.M.A.T.I.C. şi CIMPA), şi numeroase seminarii ştiinţifice, în ţară (seminarul săptămânal "Nicolae Radu" care se desfăşoară la FMI) sau în străinătate la universităţile la care am fost invitat. Aceste lucrări, scrise dupa obţinerea titlului de doctor, au mai mult de 150 de citări cu majoritatea apărută deja în jurnale prestigioase.

References

[1] 4ti2 team, 4ti2 - a software package for algebraic, geometric and combinatorial problems on linear spaces, available at www.4ti2.de, 2007.

[2] S. Aoki, H. Hara, A. Takemura, *Markov bases in algebraic statistics*, Springer Series in Statistics, Springer, New York (2012).

[3] S. Aoki, A. Takemura, Minimal basis for connected Markov chain over $3 \times 3 \times K$ contingency tables with fixed two dimensional marginals, Aust. N. Z. J. Stat. **45**, 229–249 (2003).

[4] S. Aoki, A. Takemura and R. Yoshida, *Indispensable monomials of toric ideals and Markov bases*, J. Symbolic Comput. **43**, 490–507, 2008.

[5] J. Apel, On a conjecture of R. P. Stanley; Part I - Monomial Ideals, J. of Alg. Comb. **17**, (2003), 39–56.

[6] J. Apel, On a conjecture of R. P. Stanley; Part II - Quotients Modulo Monomial Ideals, J. of Alg. Comb. **17**, (2003), 57–74.

[7] A. Aramova, J. Herzog, T. Hibi, Squarefree lexsegment ideals, Math. Z. **228** (1998), 353–378.

[8] F. Ardila, A. Boocher, The closure of a linear space in a product of lines, J. Algebraic Combinatorics 43, 199–235 (2016).

[9] A. Aslam, V. Ene, Simplicial complexes with rigid depth, Arch. Math. **99(4)**, 315–325 (2012)

[10] S. Bandari, J. Herzog, Monomial localizations and polymatroidal ideals, European Journal of Combinatorics **34**(4), 752–763, (2013)

[11] S. Bandari, J. Herzog, T. Hibi, Monomial ideals whose depth function has any given number of strict local maxima, Ark. Mat., **52**(1), 11–19, (2014).

[12] A. Banerjee, Bounds on the regularity of ideals associated to simple graphs. J. Algebraic Combin. **41**(2), 303–321 (2015).

[13] I. Barany, H. Scarf, Matrices with identical sets of neighbors, Mathematics Oper. Research, **23**(4), 863–873 (1998).

[14] S. Bayati, J. Herzog, G. Rinaldo, On the stable set of associated prime ideals of a monomial ideal, Arch. Math. **98**, 213–217 (2012).

[15] D. Bayer, S. Popescu, B. Sturmfels, Syzygies of unimodular Lawrence ideals, J. Reine Angew. Math. 534, 169–186 (2001).

[16] I. Bermejo, P. Gimenez, Saturation and CastelnuovoMumford regularity, J. Algebra **303**, (2006), 592–617.

[17] J. M. Bernal, S. Morey, R. H. Villarreal, Associated primes of powers of edge ideals, Collect. Math. **63**, 361–374 (2012)

[18] D. Bernstein, A. Zelevinsky, Combinatorics of maximal minors, J. Algebraic Combinatorics 2(2), 111–121 (1993).

[19] A. Bigatti, R. LaScala, L. Robbiano, *Computing toric ideals*, J. Symbolic Computation **27**, 351–365 (1999).

[20] C. Biro, D. Howard, M. Keller, W. Trotter and S. Young, Interval partitions and Stanley depth, J. Combinatorial Theory Series A, **117**(4), 475–482 (2010).

[21] A. Björner, M. Las Vergnas, B. Sturmfels, N. White, G. Ziegler *Oriented matroids*, Cambridge University Press, Cambridge (1993).

[22] A. Björner, M. Wachs, Shellable nonpure complexes and posets. I, Trans. Amer. Math. Soc. **349** (1997), 3945–3975.

[23] J. Blasiak, The toric ideal of a graphic matroid is generated by quadrics, Combinatorica **28**, 283–297 (2008).

[24] T. Bogart, R. Hemmecke, and S. Petrović, Universal Gröbner Bases of Colored Partition Identities, Exp. Mathematics 21(4), 395–401 (2012).

[25] J. Bonin, Basis-exchange properties of sparse paving matroids, Adv. in Appl. Math. **50**(1), 6–15 (2013).

[26] A. Boocher, Free resolutions and sparse determinantal ideals, Math. Res. Lett. 19(4), 805–821 (2011).

[27] A. Boocher, B. C. Brown, T. Duff, L. Lyman, T. Murayama, A. Nesky and K. Schaefer, Robust graph ideals, Annals of Combinatorics 19(4), 641–660 (2015).

[28] A. Boocher, E. Robeva, Robust toric ideals, J. Symbolic Computation, 68(1), 254–264 (2015).

[29] K. Borna, On linear resolution of powers of an ideal, Osaka J. Math., **46**, 1047–1058 (2009)

[30] M. Bourel, A. Dickenstein, A. Rittatore, Self-dual projective toric varieties, J. London Math. Soc. (2) 84, 514–540 (2011).

[31] J. Böhm and S. A. Papadakis, On the structure of Stanley-Reisner rings associated to cyclic polytopes, Osaka J. Math. 49, 81–100 (2012).

[32] E. Briales, A. Campillo, C. Marijuán, P. Pisón, *Minimal systems of generators for ideals of semigroups*, J. Pure Appl. Algebra **124** (1998), 7–30.

[33] M. Brodmann, The asymptotic nature of the analytic spread, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **86**, 35–39 (1979)

[34] M. Brodmann, Asymptotic stability of $\mathrm{Ass}(M/I^nM)$, Proc. AMS **74**, 16–18 (1979)

[35] W. Bruns and J. Herzog, *Cohen-Macaulay rings* Revised edition. Cambridge University Press (1998).

[36] L. Burch, Codimension and analytic spread, Proc. Cambridge Philos. Soc. **72**, 369–373 (1972)

[37] H. Charalambous, A. Katsabekis and A. Thoma, *Minimal systems of binomial generators and the indispensable complex of a toric ideal*, Proc. Amer. Math. Soc. **135**, 3443–3451 (2007).

[38] **H. Charalambous, A. Thoma, M. Vladoiu, *Markov complexity of monomial curves*, J. Algebra 417 (2014) 391–411.**

[39] **H. Charalambous, A. Thoma, M. Vladoiu, *Markov bases and generalized Lawrence liftings*, Annals of Combinatorics 19 (2015), 661–669.**

[40] **H. Charalambous, A. Thoma, M. Vladoiu, *Binomial fibers and indispensable binomials*, J. Symbolic Computation 74 (2016), 578–591.**

[41] **H. Charalambous, A. Thoma and M. Vladoiu, Minimal generating sets of lattice ideals, Collectanea Mathematica, 68(3), 377–400 (2017).**

[42] J. Chen, S. Morey, A. Sung, The stable set of associated primes of the ideal of a graph, Rocky Mountain J. Math. **32**, 71–89 (2002)

[43] H–J. Chiang–Hsieh, Some arithmetic properties of matroidal ideals, Commun. Algebra **38**, 944–952 (2010)

[44] M. Cimpoeaş, Some remarks on the Stanley depth for multigraded modules. Le Matematiche **LXIII**, 165-175 (2008).

[45] M. Cimpoeaş, Stanley depth of complete intersection monomial ideals, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie **51**(99) No. 3, 205–211 (2008).

[46] CoCoATeam, CoCoA: a system for doing Computations in Commutative Algebra, available at http://cocoa.dima.unige.it

[47] A. Conca, E. De Negri, E. Gorla, Universal Gröbner Bases for Maximal Minors, Int. Math. Res. Not. 11, 3245–3262 (2015).

[48] A. Conca, J. Herzog, Castelnuovo-Mumford regularity of products of ideals, Collect. Math. **54** (2003), 137-152.

[49] J. De Loera, R. Hemmecke, M. Köppe, *Algebraic and geometric ideas in the theory of discrete optimization.* MOS-SIAM Series on Optimization, 14. SIAM, Philadelphia, PA, 322 pp, 2013.

[50] J. De Loera, R. Hemmecke, S. Onn, R. Weismantel, N-fold integer programming, Discrete Optimization 5, 231–241 (2008).

[51] J. De Loera, S. Onn, Markov bases of three-way tables are arbitrarily complicated, J. Symbolic Computation 41, 173–181 (2006).

[52] J. De Loera, B. Sturmfels, R. Thomas, Gröbner bases and triangulations of the second hypersimplex, Combinatorica 15(3), 409–424 (1995).

[53] Ch. Delorme, *Sous monoides d'intersection complete de N*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **9** (1976), 145–154.

[54] P. Diaconis and B. Sturmfels, *Algebraic algorithms for sampling from conditional distributions*, Ann. Statist., **26(1)**, 363–397 (1998).

[55] A. Dickenstein, L.F. Matusevich, E. Miller, *Combinatorics of binomial primary decomposition*, Math. Z. **264**, 745–763, (2010).

[56] A. Dress, A new algebraic criterion for shellability, Beitrage zur Alg. und Geom. **34**(1) (1993), 45–55.

[57] M. Drton, B. Sturmfels, S. Sullivant, *Lectures on algebraic statistics*, Oberwolfach Seminars, 39. Birkhäuser Verlag, Basel, 2009. viii+171 pp.

[58] N. Dück, K.H. Zimmermann, *Graver Bases and Universal Gröbner bases for Linear Codes*, arXiv:1401.6304v2, 2014.

[59] A. M. Duval, B. Goeckner, C. J. Klivans, J. L. Martin, A non-partitionable Cohen-Macaulay simplicial complex, Adv. Math. **299** 381–395 (2016).

[60] J. A. Eagon and V. Reiner, Resolutions of Stanley-Reisner rings and Alexander duality, J. Pure and Appl. Alg., **130** (1998), 265–275.

[61] L. Ein, Varieties with small dual varieties, I, Inventiones Math. **86**, 63–74 (1986).

[62] L. Ein, Varieties with small dual varieties, II, Duke Math. J. **52**, 895–907 (1985).

[63] L. Ein, R. Lazarsfeld, and K. Smith, Uniform bounds and symbolic powers on smooth varieties, Inventiones Math., **144**, 241–252 (2001)

[64] D. Eisenbud, *Commutative algebra; with a view towards algebraic geometry*, Graduate Texts Math., Springer. 1995.

[65] D. Eisenbud and S. Goto, Linear Free Resolutions and Minimal Multiplicity, J. Algebra, **88**, 89–133 (1984)

[66] D. Eisenbud, C. Huneke, Cohen–Macaulay Rees algebras and their specialization, J. Algebra **81**, 202–224 (1983)

[67] D. Eisenbud, B. Sturmfels, *Binomial ideals*, Duke Math. J. **84**, 1–45, (1996).

[68] S. Faridi, The facet ideal of a simplicial complex, Manuscripta Math. **109**, 159–174 (2002)

[69] K. Fischer, W. Morris, J. Shapiro, *Affine semigroup rings that are complete intersections*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1995), 3137–3145.

[70] C. Francisco, H. Tai Ha, A. Van Tuyl, A conjecture on critical graphs and connections to the persistence of associated primes, Discrete Math. **310**, 2176–2182 (2010)

[71] C. Francisco, H. Tai Ha, A. Van Tuyl, Coloring of hypergraphs, perfect graphs and associated primes of powers of monomial ideals, J. Algebra, **331**, 224–242 (2011).

[72] C. Francisco, J. Mermin, and J. Schweig, Generalizing the Borel property, J. London Math. Soc., **87**(2), 724–740 (2013)

[73] C. Francisco, J. Migliore, and U. Nagel, On the componentwise linearity and the minimal free resolution of a tetrahedral curve, J. Algebra, **299**, 535–569 (2006)

[74] C. Francisco and A. Van Tuyl, Some families of componentwise linear monomial ideals, Nagoya Math. J., **187**, 115–156 (2007)

[75] I. Gitler, E. Reyes, J. A. Vega, *Complete intersection toric ideals of oriented graphs and Chorded-Theta subgraphs*, J. Algebr. Comb. **38** (2013), 721–744.

[76] I. Gitler, E. Reyes and R. H. Villarreal, Blowup algebras of squarefree monomial ideals and some links to combinatorial optimization problems, Rocky Mountain J. Math. **39**, 71–102 (2009).

[77] J. E. Graver, On the foundations of linear and integer linear programming I, Math. Program. **9**, 207–226 (1975).

[78] E. Gross, S. Petrović, Combinatorial degree bound for toric ideals of hypergraphs, Internat. J. Algebra Comput. 23(6), 1503–1520 (2013).

[79] R. Hemmecke, K. Nairn, On the Gröbner complexity of matrices, J. Pure Appl. Alg. **213**, 1558–1563 (2009).

[80] R. Hemmecke, P. Malkin, *Computing generating sets of lattice ideals and Markov bases of lattices*, J. Symbolic Computation **44**, 1463–1476, 2009.

[81] J. Herzog, *Generators and relations of abelian semigroups and semigroup rings,* Manuscripta Math. **3** (1970), 175–193.

[82] J. Herzog, Alexander duality in commutative algebra and combinatorics, *in* "Proceedings of the International Conference on Algebra", *Algebra Colloq.* **11** (2004), no. 1, 21–30.

[83] J. Herzog, A survey on Stanley depth, in: *Monomial ideals, computations and applications*, vol. 2083 of Lecture Notes in Math., Springer, pages 3–45 (2013).

[84] J. Herzog and T. Hibi, *Monomial Ideals.* GTM 260. Springer 2010.

[85] J. Herzog, T. Hibi, The depth of powers of an ideal, J. Algebra **291**, 534–550 (2005)

[86] J. Herzog, T. Hibi, Discrete polymatroids, J. Algebraic Combinatorics, **16**, 239–268 (2002)

[87] J. Herzog, T. Hibi, Bounding the socles of powers of squarefree monomial ideals, Commutative Algebra and Noncommutative Algebraic Geometry, II MSRI Publications, **Cambridge University Press**, Volume 68, pages 223–229, 2015, ISBN 978-1-107-14972-4.

[88] J. Herzog, T. Hibi, Cohen-Macaulay polymatroidal ideals, European J. Combin. **27** (2006), no. 4, 513–517.

[89] J. Herzog, T. Hibi, N. V. Trung, X. Zheng, Standard graded vertex cover algebras, cycles and leaves, Trans. AMS **360**, 6231–6249 (2008).

[90] J. Herzog, T. Hibi, M. Vladoiu, Ideals of fiber type and polymatroids, Osaka J. Math., **42** (2005), no. 4, 807–829.

[91] J. Herzog, D. Popescu, Finite filtrations of modules and shellable multicomplexes, Manuscripta Math. **121** (2006), 385–410.

[92] J. Herzog, D. Popescu, M. Vladoiu, On the Ext-modules of ideals of Borel type, Contemporary Mathematics **331** (2003), 171–186.

[93] J. Herzog, D. Popescu, M. Vladoiu, Stanley depth and size of a monomial ideal, Proc. Amer. Math. Soc. 140, 493–504, 2012.

[94] J. Herzog, A. Qureshi, Persistence and stability properties of powers of ideals, J. Pure Appl. Algebra 219(3), 530–542 (2015)

[95] J. Herzog, A. Rauf, M. Vladoiu, The stable set of associated prime ideals of a polymatroidal ideal, J. Algebraic Combinatorics 37(2), 289–312 (2013).

[96] J. Herzog, A. Simis, W. Vasconcelos, Arithmetic of normal Rees algebras, J. Algebra **143**, 269–294 (1991).

[97] J. Herzog, A. Soleyman-Jahan, S. Yassemi, Stanley decompositions and partitionable simplicial complexes, to appear in J. Algebr. Comb.

[98] J. Herzog, H. Srinivasan, Bounds for multiplicities, Trans. Amer. Math. Soc., **350**, no. 7, 2879–2902 (1998).

[99] J. Herzog, Y. Takayama, Resolutions by mapping cones, in: The Roos Festschrift volume (2), Special issue in honor of Jan-Erik Roos on the occasion of his 65th birthday, Homology, Homotopy and Applications **4**, No. 2(2), 277 – 294 (2002).

[100] J. Herzog, Y. Takayama, N. Terai, On the radical of a monomial ideal, Arch. Math. **85**, 397–408 (2005).

[101] J. Herzog, M. Vladoiu, Squarefree monomial ideals with constant depth function, J. Pure Appl. Algebra 217(9), 1764–1772 (2013).

[102] J. Herzog, M. Vladoiu, Monomial ideals with primary components given by powers of monomial prime ideals, Electronic J. Combinatorics 21(1), #P1.69 (2014).

[103] J. Herzog, M. Vladoiu, X. Zheng, How to compute the Stanley depth of a monomial ideal. J. Algebra 322, 3151–3169 (2009).

[104] M. Hochster, Rings of invariants of tori, Cohen-Macaulay rings generated by monomials, and polytopes, Annals of Math. (2), **96**, 318–337 (1972).

[105] S. Hoşten, B. Sturmfels, *GRIN: an implementation of Gröbner bases for integer programming,* in Integer Programming and Combinatorial Optimization (Copenhagen), LNCS **920** Springer Verlag, 267–276, 1995.

[106] S. Hoşten, R. Thomas, *Gröbner bases and integer programming.* In Gröbner Bases and Applications, LMSLNS **251**, 144–158, Cambridge, Cambridge University Press, 1998.

[107] S. Hoşten, S. Sullivant, A finiteness theorem for Markov bases of hierarchical models, J. Combin. Theory Ser. A **114**, 311–321 (2007).

[108] C. Huneke, On the associated graded ring of an ideal, Illinois J. Math. **26**, 121–137 (1982).

[109] Huy Tai Ha, N. V. Trung, and T. N. Trung, Depth and regularity of powers of sums of ideals, Math. Zeitschrift, 282(3), 819–838 (2016).

[110] E. Hyry, The diagonal subring and the Cohen–Macaulay property of a multigraded ring, Trans. AMS, **351**, 2213–2232 (1999).

[111] B. Ichim, L. Katthän, J. Moyano–Fernandez, How to compute the Stanley depth of a module, Mathematics of Computation **86**, 455–472 (2017).

[112] M. N. Ishida, *Normal semigroup rings which are complete intersections*, in: Proc. Symposium on Commtative Algebra, Karuizawa, 1978.

[113] S. Jukna, *Extremal Combinatorics-with Applications in Computer Science,* Texts in Theoretical Computer Science. Springer, New York (2001).

[114] T. Kaiser, M. Stehlik, R. Skrekovski, Replication in critical graphs and the persistence of monomial ideals, Journal of Combinatorial Theory Series A, Vol. 123 (1), 239–251 (2014).

[115] K. Kashiwabara, The toric ideal of a matroid of rank 3 is generated by quadrics, Electron. J. Combin. **17**, RP28, 12pp (2010).

[116] A. Katsabekis, I. Ojeda, *An indispensable classification of monomial curves in* $\mathbb{A}^4(\mathbf{k})$, Pacific J. Math. 268, no. 1, 95–116, 2014.

[117] L. Katthän, Betti posets and the Stanley depth, Arnold Math. J., **2**(2), 267–276 (2016).

[118] T. Kähle, E. Miller, *Decompositions of commutative monoid congruences and binomial ideals*, Algebra Number Theory **8** (2014) 1297–1364.

[119] V. Kodiyalam, Asymptotic behaviour of Castelnuovo–Mumford regularity, Proc. Amer. Math. Soc., **128**, 407–411 (1999)

[120] M. Janet, Les modules des formes algébriques et la théorie générale des systèmes différentiels, Ann. Sci. École Norm. Sup. **41**(3) (1924), 27–65.

[121] M. Lason, M. Michalek, On the toric ideal of a matroid, Adv. in Mathematics 259, 1–12 (2014).

[122] H. López, R. Villarreal, *Complete intersections in binomial and lattice ideals*, Internat. J. Algebra Comput. **23** (2013) 1419–1429.

[123] G. Lyubeznik, On the Arithmetical Rank of Monomial ideals. J. Algebra **112**, 86–89 (1988).

[124] K. Matsuda, T. Suzuki, A. Tsuchiya, Nonincreasing depth functions of monomial ideals, arXiv:1607.07223v3.

[125] H. Matsumura, Commutative ring theory, Cambridge University Press, 1986.

[126] E. W. Mayr, *Some complexity results in polynomial ideals,* Journal of Complexity 13, 303–325, 1997.

[127] J. Migliore and U. Nagel, Tetrahedral curves, Int. Math. Res. Notices, **15**, 899–939 (2005)

[128] E. Miller, The Alexander duality functors and local duality with monomial support, J. Algebra **231** (2000), 180–234.

[129] E. Miller, *Theory and Applications of lattice point methods for binomial ideals*, in Combinatorial Aspects of Commutative Algebra and Algebraic Geometry, Proceedings of Abel Symposium held at Voss, Norway, 14 June 2009, Abel Symposia, vol. 6, Springer Berlin Heidelberg, pp. 99–154, 2011.

[130] E. Miller, B. Sturmfels, *Combinatorial Commutative Algebra*, Grad. Texts in Math., vol. 227, Springer-Verlag, New York, (2005).

[131] M. Morales, A. Thoma, *Complete intersection lattice ideals*, J. Algebra **284** (2005), 755–770.

[132] S. Morey, R. H. Villarreal, Edge ideals: algebraic and combinatorial properties, Progress in Commutative Algebra 1, De Gruyter 2012, 85–126.

[133] H. Nakajima, *Affine torus embeddings which are complete intersections,* Tôhoku Math. J. **38** (1986), 85–98.

[134] Le Dinh Nam, M. Varbaro, When does the depth stabilize soon?, Journal of Algebra **445**, 181–192 (2016).

[135] E. Nevo, I. Peeva, C_4-free edge ideals, J. Algebraic Combinatorics, **37**, 243–248 (2013)

[136] L. O'Carroll, F. Planas–Vilanova, R. Villarreal, *Degree and algebraic properties of lattice and matrix ideals*, SIAM J. Discrete Math. **28** (2014), no. 1, 394–427.

[137] H. Ohsugi and T. Hibi, *Indispensable binomials of finite graphs*, J. Algebra Appl. **4**, no 4, 421–434 (2005).

[138] H. Ohsugi and T. Hibi, *Toric ideals arising from contingency tables*, Proceedings of the Ramanujan Mathematical Society's Lecture Notes Series, pp.87–111 (2006).

[139] H. Ohsugi, T. Hibi, Toric ideals generated by quadratic binomials, J. Algebra 218, 509–527 (1999).

[140] I. Ojeda, Examples of generic lattice ideals of codimension 3, Communications in Algebra, 36:1, 279–287 (2008).

[141] I. Ojeda, A. Vigneron-Tenorio, Indispensable binomials in semigroup ideals, Proc. Amer. Math. Soc. **138** nr. 12, 4205–4216, (2010).

[142] J. G. Oxley, Matroid Theory, Oxford University Press, Oxford, New York, 1992.

[143] I. Peeva and B. Sturmfels, *Generic lattice ideals*, J. Amer. Math. Soc. **11**, 363–373, (1998).

[144] I. Peeva, B. Sturmfels, Syzyies of codimension 2 lattice ideals, Math. Zeitschrift 229(1), 163–194 (1998).

[145] S. Petrović, D. Stasi, Toric algebra of hypergraphs, J. Algebraic Combinatorics, Volume 39, Issue 1, pp 187-208 (2014).

[146] **S. Petrović, A. Thoma, M. Vladoiu, Bouquet algebra of toric ideals, arXiv:1507.02740v3.**

[147] **S. Petrović, A. Thoma, M. Vladoiu, Hypergraph encodings of arbitrary toric ideals, arXiv:1711.04354v1.**

[148] W. Plesken, D. Robertz, Janet's approach to presentations and resolutions for polynomials and linear pdes, Arch. Math. **84** (2005), 22–37.

[149] A. Popescu, Special Stanley Decompositions. Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie **53**(101), 361–372 (2010).

[150] D. Popescu, The Stanley conjecture on intersections of four monomial prime ideals. Comm. Algebra **41**(11), 4351–4362 (2013).

[151] **D. Popescu, M. Vladoiu, Strong Lefschetz property on algebras of embedding dimension three, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie (N.S.) 49(97), no.1, 75–86 (2006).**

[152] A. Rauf, Stanley Decompositions, Pretty Clean Filtrations and Reductions Modulo Regular Elements, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumaine **50**(**98**) (2007),347–354.

[153] A. Rauf, Depth and Stanley Depth of Multigraded Modules. Comm. Algebra. **38**, 773–784 (2010).

[154] G. A. Reisner, Cohen-Macaulay quotients of polynomial rings, Advances in Math., **21**(1), 30–49 (1976).

[155] E. Reyes, Ch. Tatakis, A. Thoma, Minimal generators of toric ideals of graphs, Adv. Appl. Math. **48**, 64–78 (2012).

[156] J. C. Rosales, P. A. Garcia-Sanchez, *On complete intersection affine semigroups,* Commun. Algebra **23** (1995), 5395–5412.

[157] T. Römer, Generalized Alexander duality and applications. Osaka J. Math. **38**, 469–485 (2001).

[158] F. Santos, B. Sturmfels, Higher Lawrence configurations, J. Combin. Theory Ser. A **103**, 151–164 (2003).

[159] U. Schäfer, *Der kanonische modul monomialer raumkurven,* Diplomarbeit, Martin-Luther-Universität Halle/Wittenberg, Halle, (1985).

[160] G. Scheja, O. Scheja, U. Storch, *On regular sequences of binomials*, Manuscripta Math. **98** (1999), 115–132.

[161] J. Schweig, Toric ideals of lattice path matroids and polymatroids, J. Pure Appl. Algebra **215**, 2660–2665 (2011).

[162] Y. Shen, Stanley depth of complete intersection monomial ideals and upper-discrete partitions. J. Algebra **321**, 1285–1292 (2009).

[163] A. Simis, W. V. Vasconcelos, R. H. Villarreal, On the ideal theory of graphs, J. Algebra **167**, 389–416 (1994)

[164] G. M. Greuel, G. Pfister, and H. Schönemann, Singular 2.0. A Computer Algebra System for Polynomial Computations. Centre for Computer Algebra, University of Kaiserslautern (2001), http://www.singular.uni-kl.de.

[165] A. Soleyman Jahan, Prime filtrations of monomial ideals and polarizations, J. Algebra **312** (2007), 1011 – 1032.

[166] A. Soleyman–Jahan, Prime filtration and Stanley decompositions of squarefree modules and Alexander duality. Manuscripta Math. **130**, 533–550 (2009).

[167] R. P. Stanley, Linear Diophantine equations and local cohomology, Invent. Math. **68**, (1982), 175–193.

[168] R. P. Stanley, *Combinatorics and Commutative Algebra*, Birkhäuser, 1983.

[169] R. P. Stanley, Positivity Problems and Conjectures in Algebraic Combinatorics, In Mathematics: Frontiers and Perspectives (V. Arnold, M. Atiyah, P. Lax, and B. Mazur, eds.), American Mathematical Society, Providence, RI, 2000, pp. 295-319.

[170] R. P. Stanley, The upper bound conjecture and Cohen-Macaulay rings, Studies in Appl. Math., **54**(2), 135–142 (1975).

[171] B. Sturmfels, *Gröbner Bases and Convex Polytopes*, University Lecture Series, No. 8 American Mathematical Society Providence, R.I. (1995).

[172] B. Sturmfels, S. Sullivant, *Toric ideals of phylogenetic invariants*, J. Computational Biology **12**, 204–228, (2005).

[173] B. Sturmfels, R. Weismantel, G. Ziegler, *Gröbner Bases of Lattices, Corner Polyhedra, and Integer Programming*, Beiträge zur Algebra und Geometrie, Contributions to Algebra and Geometry, **36** (1995), 281–298.

[174] B. Sturmfels, A. Zelevinsky, Maximal minors and their leading terms, Adv. in Mathematics 98(1), 65–112 (1993).

[175] S. Sullivant, Strongly robust toric ideals in codimension 2, arXiv:1610.07476v1, 2016.

[176] Ch. Tatakis, Generalized robust toric ideals, J. Pure Applied Algebra 220(1), 263–277 (2016).

[177] Ch. Tatakis, A. Thoma, On the universal Gröbner bases of toric ideals of graphs, J. Combin. Theory Ser. A 118, 1540–1548 (2011).

[178] E. Tevelev, *Projective duality and homogeneous spaces*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences 133, Invariant Theory and Algebraic Transformation Groups 4 (Springer, New York), (2005).

[179] **A. Thoma, M. Vladoiu, The defining matrices of self-dual projective toric varieties, in preparation.**

[180] R. H. Villarreal, *Monomial Algebras*, Second Edition, Chapman and Hall/CRC, Taylor & Francis Group, 704 pages, 2015.

[181] R. H. Villarreal, Rees cones and monomial rings of matroids, Linear Algebra Appl. **428**, 2933–2940 (2008)

[182] R. Villarreal, Rees algebras of edge ideals, Comm. Algebra **23**, 3513–3524 (1995).

[183] **M. Vladoiu, Equidimensional and unmixed ideals of Veronese type, Communications in Algebra, 36, 3378–3392 (2008).**

[184] **M. Vladoiu, Discrete Polymatroids, An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa, Vol. 14(2), 89–112 (2006).**

[185] R. Waldi, Vollstndige Durchschnitte in Cohen–Macaulay–Ringen, Arch. Math. (Basel) **31**, 439–442 (1978/1979)

[186] K. Watanabe, Invariant subrings which are complete intersections, I, Nagoya Math. **77** (1980), 89–98.

[187] D. J. A. Welsh, Matroid Theory, Academic Press, London, New York, 1976.

[188] N. White, A unique exchange property for bases, Linear Algebra Appl. **31**, 81–91 (1980).

[189] K. Yanagawa, Alexander duality for Stanley-Reisner rings and squarefree $\mathbb{N}$-graded modules, J. Algebra, **225**, 630–645 (2000).