

# Contribuții la geometria local conform Kähler

*Teză de abilitare*

Victor–Corneliu Vuletescu

Facultatea de Matematică și Informatică

Universitatea din București

2018

# Rezumat

Teza de față prezintă unele dintre contribuțiile autorului la studiul unor anumite clase de varietăți nekähleriene. În continuare le voi prezenta, în ordine cronologică.

1. Studiul comportamentului clasei varietăților *local conforme Kähler* (abreviat LCK) la eclatarea punctelor. Am început acest studiu în 2009, prin publicarea în Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roum. a unui scurt articol ([VuB]) în care am dat o demonstrație riguroasă a unei teoreme datorate lui Tricerri. Articolul a atras imediat atenția specialiștilor în domeniu (10 citări în jurnale cu  $RIS \geq 0.5$ ) și este încă citat în prezent; tehnica de a produce structuri LCK pe care am introdus-o aici a fost ulterior utilizată de mai mulți autori pentru a produce alte structuri geometrice pe eclatate de puncte, cum ar fi structuri local simplectice sau structuri local conform balansate.
2. Următoarea topică pe care am investigat-o a fost studiul rangului LCK. Mai precis, în articolul [PV] (Math. Zeit., cu M. Parton) am arătat prin exemple că rangul LCK al unei varietăți LCK poate fi “netrivial”, în sensul că poate fi diferit de 1 și de primul număr Betti  $B_1(X)$ . Merită menționat că anterior publicării acestui articol se credea că acest rang nu poate avea decât una dintre cele două valori de mai sus. Mai mult, tehnicile folosite în acest articol au arătat o legătură subtilă între geometria varietăților LCK și o serie de aspecte de teoria algebrică a numerelor. Pe cale de consecință, articolul a atras atenția specialiștilor nu doar datorită rezultatului în sine, cât și datorită tehnicilor folosite.
3. La scurt timp după aceea, am inițiat studiul comportamentului varietăților LCK la eclatări de subvarietăți arbitrare, o extindere amplă și net mai tehnică a problemei considerate la punctul 1. Rezultatul acestei investigații a fost articolul [OVV] (2013, IMRN, cu L. Ornea și M. Verbitsky). Articolul a avut de asemenea un impact foarte bun, fiind citat în reviste precum Adv. in Math sau Math. Res. Letters;

pe timpul scrierii prezentei teze, am aflat despre un articol sub tipar la Geometriae Dedicata ([Hir]) în care autorul nu doar că utilizează ideile introduse de noi spre a extinde rezultatele noastre la cazul mai general al curenților LCK dar și răspunde unor probleme deschise pe care le ridicaserăm în articol.

4. În 2013 am publicat alte două articole de geometrie local conformă: unul cu L. Ornea și M. Parton ([OPV]) în care am inițiat studiul submersiilor de varietăți LCK și un al doilea ([OPPV] cu L. Ornea, M. Parton și P. Piccinni), în care am aplicat ideile și tehnicile din geometria LCK la un tip de varietăți riemanniene foarte similare, mai precis varietăți cu structură paralel local conformă  $Spin(9)$ .
5. În anul următor am publicat un nou articol ([VuOT]) în Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roum., asupra existenței metricilor LCK pe o anumită clasă de varietăți nekähleriene, așa-numitele *varietăți Olejeklaus–Toma*. Tehnica de demonstrație utilizată aici a fost din nou una ce ține preponderent de teoria numerelor: prin urmare, articolul a atras imediat atenția specialiștilor în teoria algebrică a numerelor, deschizând calea studiului invariantilor aritmetici via invarianti geometrici și reciproc. Merită menționat că pe parcursul scrierii acestei teze am aflat de o serie de lucrări în curs de elaborare care merg pe această linie. Rezultatul obținut în acest articol a fost utilizat și/sau extins în mai multe articole (unele scrise de specialiști în teoria numerelor, e.g. [Bra] or [Dub]) în jurnale precum Math. Zeit sau New York J. of Math.
6. În anul precedent, din nou în colaborare cu L. Ornea și M. Verbitsky, am considerat problema teoremelor de anulare în unele teorii de coomologie al varietăților LCK: din câte cunosc, acestea sunt primele rezultate de acest gen care se aplică unei clase largi de varietăți nekähleriene (mai precis, varietăți *LCK cu potențial*). Merită subliniat faptul că problemele analoge în context Kähler constituie instrumente bine-cunoscute și consacrate mai ales în studiul varietăților Hodge. Articolul va apărea în primul număr din acest an al J. Math. Soc. Japan ([OVV2]).
7. În final, am decis să includ de asemenea în prezenta teză o parte dintr-o lucrare în curs de finalizare (cu L. Ornea și M. Verbitsky). Am demonstrat recent că varietățile Olejeklaus–Toma ‘generale’ nu au subvarietăți analitice proprii. Din câte cunosc, acesta este primul exemplu de clasă infinită de varietăți nekähleriene ce nu conțin subvarietăți proprii.

# Bibliografie a rezumatului

- [Bra] Brauning, O. *Oeljeklaus-Toma manifolds and arithmetic invariants*, Math. Z. 286 (2017), no. 1-2, 291-323.
- [Dub] A. Dubickas, *Nonreciprocal units in a number field with an application to Oeljeklaus-Toma manifolds*, New York J. Math, **20**, (2014), 257–274
- [Hir] S. Hirokazu, *Compact complex manifolds bimeromorphic to locally conformally Kähler manifolds*, Geom. Dedicata, (2018)
- [OPPV] L. Ornea, M. Parton, P. Piccini, V. Vuletescu, *Spin(9) geometry of the octonionic Hopf fibration*, Trs. Groups, **18** (3), (2013)m 845–864.
- [OPV] L. Ornea, M. Parton, V. Vuletescu, *Holomorphic submersions of locally conformally Kähler manifolds*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 193 (2014), No. 5, 1345-1351
- [OVV] L. Ornea, M. Verbitsky, V. Vuletescu, *Blow-ups of locally conformally Kähler manifolds*, Int. Math. Res. Not. 2013, No. 12 (2013), 2809-2821
- .
- [OVV2] L. Ornea, M. Verbitsky, V. Vuletescu, *Weighted Bott-Chern and Dolbeault cohomology for LCK-manifolds with potential*, J. Math. Soc. Japan **70**(1), (2018), 409–422.
- [PV] M. Parton, V. Vuletescu, *Examples of non-trivial rank in locally conformal Kähler geometry*, Math. Z. 270 (2012), no. 1-2, 179-187.
- [VuB] V. Vuletescu, *Blowing-up points on locally conformally Kähler manifolds*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie **52**(100) (2009), 387–390.
- [VuOT] V. Vuletescu, *LCK metrics on Oeljeklaus-Toma manifolds versus Kronecker's theorem* Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie **57**(2),(2014), 225–231.