

# Modele neclasice: Pseudo-hoop-uri si aplicații ale P sistemelor

Rodica Ceterchi

## Rezumat

Această lucrare este compusă din două părți independente. Partea I este dedicată studierii unor structuri algebrice pentru logica multi-valentă. Partea a II-a este în domeniul calculului cu membrane, și prezintă câțiva algoritmi de sortare.

Modelul clasic pentru semantica algebrică a logicilor multi-valente este intervalul  $[0,1]$ , unde conjuncția este modelată de o  $t$ -normă continuă, adică de o operație binară continuă, care este comutativă, asociativă, monotonă și are unitate 1. Pe  $[0,1]$  avem trei  $t$ -norme importante: Lukasiewicz, produs și Gödel. Mai mult, un rezultat important al lui Mostert și Shields [84] afirmă că orice  $t$ -normă pe  $[0,1]$  este pe sub-intervale egală cu una din cele trei de mai sus.

Generalizând situația de pe intervalul  $[0,1]$ , trei tipuri de algebre au fost studiate independent: MV-algebrele, algebrele produs și algebrele Gödel. MV-algebrele au fost introduse de Chang în 1958 [19] ca structuri algebrice pentru logica Lukasiewicz cu o infinitate de valori de adevăr. Ele au fost precedate de Wajsberg în 1935 [92], care a introdus o structură algebrică pentru aceeași logică, dar bazată pe implicație, reziduala unei  $t$ -norme. Mai târziu [46] s-a demonstrat că cele două structuri sunt echivalente una alteia.

Hájek introduce o structură mai generală, cea de BL algebră ([55], [56], [57]), din care cele trei tipuri precedente de algebre pot fi obținute ca și cazuri particulare. O structură și mai generală este cea de hoop, introdusă de Bosbach în 1966 [7].

Primele modele *necomutative* pentru conjuncție au fost considerate în 1999. Școala românească a introdus algebre necomutative: pseudo-MV algebrele în [50], [52], pseudo-Wajsberg algebrele în [12], [14], și pseudo-BL algebrele în [51], [32], [33]. În articolul [53] se reia studiul hoop-urilor necomutative, și se arată că pseudo-hoop-urile sunt generalizări ale algebrelor (necomutative) menționate mai sus. Lucrarea de față se situează în aria acestor extensii necomutative.

În capitolul 1 introducem definiții de bază și proprietăți ale pseudo-hoop-urilor. O parte se bazează pe [7], în scopul introducerii prezentării axiomatice a pseudo-hoop-urilor. Mai târziu sunt introduse clase particulare de pseudo-hoop-uri.

În capitolul 2 începem prin a studia pseudo-hoop-urile Wajsberg, apoi algebrele pseudo-Wajsberg. Introducem definiția în etape, demonstrăm echivalența categorială cu pseudo-MV

algebrele, și investigăm mai multe proprietăți legate de structura laticială, stabilind și echivalența categorială cu o clasă de monoizi reziduați. Prezentarea se bazează pe articolele [12], [14], [13].

Capitolul 3 se ocupă de pseudo-hoop-urile produs și se bazează pe articolul [17]. Deoarece în cazul comutativ a fost introdus conceptul de PL algebră, definim conceptul de pseudo-PL algebră. Demonstrăm o echivalență categorială a unei clase particulare de pseudo-hoop-uri produs cu conuri negative de lo-grupuri completate cu un prim element.

Capitolul 4 este dedicat problemei găsirii de descompuneri în sume ordinale a pseudo-hoop-urilor lineare. Vrem să regăsim pentru pseudo-hoop-uri un rezultat analog rezultatului lui Mostert and Shields [84] pentru intervalul  $[0, 1]$ . Prezentăm descompunerea Hájek, apoi descompunerea Aglianó-Montagna, bazându-ne pe generalizările lor la cazul necomutativ ale lui Dvurecenskij, și, în final, o descompunere care folosește clase de echivalență. Capitolul se bazează pe articolul [18]. Construcția noastră cu clase de echivalență nu obține doar descompunerea Hájek, ci și descompunerea Aglianó-Montagna, și, de asemenea, descompunerea Cignoli-Esteva-Godo-Torrens, stabilind astfel comparabilitatea celor trei descompuneri.

Partea a II-a este o contribuție la domeniul calculului cu membrane.

Calculul cu membrane (membrane computing) este un domeniu al informaticii care folosește modele de calcul inspirate de structura și funcționarea celulelor și țesuturilor vii. Își are originea în lucrarea lui Gheorghe Păun [59], publicată în anul 2000, dar circulată încă din 1998. Aceste modele de calcul au fost numite mai târziu P sisteme.

Prima trăsătură care a fost introdusă în model a fost compartimentalizarea. Membranele delimitează regiuni din spațiu, în aceste regiuni au fost plasate obiecte (simboluri) împreună cu reguli de evoluție (rescriere) și rezultatul a fost obținerea unor dispozitive de calcul puternice, capabile să genereze mulțimi de numere naturale, limbaje, și, mai târziu, să rezolve probleme NP. Pe măsură ce domeniul s-a dezvoltat, alte caracteristici au fost preluate de la funcționarea celulelor vii, și introduse în modelul de calcul. De exemplu, existența catalizatorilor pentru regulile de evoluție ale obiectelor, posibilitatea de comunicare între diverse regiuni, sau posibilitatea de a organiza celulele asemănător țesuturilor, cu legături între ele modelate de grafuri. Posibilitățile membranelor de a se dizolva și de a se diviza au fost alte aspecte încorporate în modelul computațional. O multitudine de diverse variante de P sisteme au fost propuse și investigate.

Calculul cu membrane este o arie de cercetare foarte activă, cu o mulțime de articole, o monografie [60] în 2002, două volume de aplicații, [22] în 2006 și [28] în 2014, și în 2010 un dicționar (Handbook) cuprinzător publicat de Oxford University Press [63].

Autoarea prezentei lucrări a fost interesată de aplicații ale P sistemelor la domenii clasice din informatică, precum sortarea, circuite Booleene, generarea limbajelor picturale, arhitecturi paralele. În lucrarea de față am ales tema sortării, folosind o mare varietate de P sisteme.

Capitolul 5 este dedicat implementării unor algoritmi de sortare folosind P sisteme cu comunicare. P sisteme cu comunicare sub formă de reguli de simport și antiport au fost introduse în [62]. Regulile permit obiectelor deplasarea între regiuni, peste membrane. Construim un comparator utilizând priorități între reguli de comunicare. Adăugând promotori regulilor comparatorului și deplându-i convenabil între membrane, arătăm că putem simula cu P sisteme comportamentul a două rețele de sortare. Capitolul se bazează pe lucrarea [11], care a inspirat și alte cercetări (vezi [3], [4], [68]).

Sistemele neurale cu spike-uri (SN P sisteme) au fost introduse în [40]. Ele sunt inspirate de funcționarea neuronilor, care trimit semnale (spike-uri) unul altuia prin axoni. Capitolul 6 este dedicat prezentării unui SN P sistem pentru sortare. Atât comparatorii cât și datele sunt modelate acum diferit, căci avem la dispoziție un singur simbol, și momentele de timp la care ajunge în neuroni determinați. Facem o comparație cu alte modele care folosesc tot SN P sisteme. Capitolul se bazează pe lucrarea [18].

În capitolul 7 simulăm cu P sisteme algoritmul bitonic de sortare, implementat pe o arhitectură 2D. Folosim aici o versiune de P sisteme pe care am propus-o într-o serie de lucrări dedicate simulării unor arhitecturi paralele ([13], [14], [12]), și anume P sisteme cu grafuri dinamice de comunicare. Ele sunt o generalizare a P sistemelor țesut, în care graful de comunicare între membrane este dinamic, iar regulile sunt asociate arcelor din graf. Dezvoltăm și un al doilea model, care folosește o singură membrană. Prezentarea se bazează pe lucrarea [16].

Capitolul 8 este dedicat prezentării unor algoritmi de sortare implementați cu kP sisteme. kP sistemele au fost introduse recent [32, 33] într-un efort de a unifica diverse variante de P sisteme. Ele pot fi subiectul unor metode formale de testare și verificare. Prezentarea se bazează pe lucrările [29] și [30].

Lucrarea se încheie cu Partea a III-a. Sunt prezentate împrejurările în care autoarea a ajuns să lucreze la subiectele prezentate în teză, precum și câteva teme asupra cărora se va apleca în viitor.