

# Cercetări în logica multivalenta

Ioana Leuştean

## Rezumat

În această teză vom prezenta rezultate în logici multi-valente, evidenţiind trei direcţii de cercetare: prima se referă la *logica Łukasiewicz  $\infty$ -valentă* îmbogăţită cu operaţia produs şi conţine rezultatele din [32, 34, 28, 74, 75, 29, 77]; a doua conţine *elemente de teoria probabilităţilor definite pe mulţimi de evenimente multi-valente*, așa cum este dezvoltată în [82, 83, 76]; a treia direcţie este centrată pe studiul *algebrelor Łukasiewicz-Moisil  $n$ -valente* [81, 25], dar conţine și cercetări recente în *logica Moisil*.

Istoria logicilor multi-valente a început cu sistemul 3-valent definit de J. Łukasiewicz în 1920 [84], care a fost extins la un sistem  $n$ -valent și  $[0, 1]$ -valent de J. Łukasiewicz și A. Tarski în 1930 [85]. Logica Łukasiewicz a evoluat în strânsă legătură cu partea sa algebrică, și anume teoria MV-algebrelor, definite de C.C. Chang în 1958 [13]. Prin urmare, relația dintre MV-algebre și logica Łukasiewicz este similară cu relația dintre algebrele Booleene și logica clasică. Teoria MV-algebrelor a cunoscut o dezvoltare extensivă după 1986, când D. Mundici a demonstrat că MV-algebrele sunt categoric echivalente cu grupurile abeliene laticial-ordonate cu unitate tare [106]. În strânsă legătură cu teoria algebrică, în logica Łukasiewicz regăsim abordări semantice folosind jocurile Renyi-Ulam cu minciuni [108], jocurile Gilles [40] dar și criteriul de coerență al lui De Finetti [113]. Logica Łukasiewicz este strâns legată de teoria mulțimilor fuzzy: algebrele libere deci, în particular algebra Lindenbaum-Tarski, pot fi reprezentată ca o algebră de mulțimi fuzzy.

Logica Łukasiewicz și teoria MV-algebre sunt amintite pe scurt în Capitolul 2.

Mulțimea valorilor de adevăr ale logicii Łukasiewicz  $\infty$ -valente este intervalul real  $[0, 1]$ , iar conectorii logici sunt *negația Łukasiewicz*  $\neg x = 1 - x$  și implicația Łukasiewicz  $x \rightarrow y = \min(1 - x + y, 1)$ . Deoarece intervalul  $[0, 1]$  este închis față de produsul numerelor reale, o direcție de cercetare naturală a fost studiul logicii Łukasiewicz îmbogăţită cu o operație de produs, care poate fi un produs intern sau o înmulțire scalară cu scalari din  $[0, 1]$ .

Teoriile ecuaționale ale logicii Łukasiewicz cu produs sunt prezentate în Capitolul 3. Primele încercări de a dezvolta teoria produsului în cadrul logicii Łukasiewicz au condus la noțiunea de *PMV-algebră* [26, 102]. În timp ce PMV-algebre formează o varietate, structura standard pe  $[0, 1]$  generează o subvarietate proprie. *Riesz MV-algebrele* [32, 34] propun o altă abordare prin înlocuirea produsului binar cu o înmulțire scalară. În acest fel varietatea este generată de modelul standard și, în consecință, logica asociată satisface teorema de completitudine standard. Teoria *fMV-algebrelor* [74] combină cele două abordări. După ce prezentăm teoriile algebrice amintite, prezentăm o teoremă generală de formă normală, care ne

permite să reprezentăm termenii (formulele) sistemelor studiate ca funcții continue, polinomiale pe poriuni. De asemenea, prezentăm un algoritm care calculează cu formula asociată unei funcții date. În continuare caracterizăm algebrele libere și interpretăm rezultatele obținute în raport cu *conjectura Pierce-Birkhoff*, legătură ce va fi analizată într-un capitol ulterior.

Capitolele 4 și 5 tratează două sisteme particulare de calcul propozițional.

În Capitolul 4 dezvoltăm  $\mathbb{R}\mathcal{L}$ , logică ce are ca modele Riesz MV-algebrele. Extinzând teorema de echivalență a lui Mundici, putem reprezenta orice Riesz MV-algebră ca intervalul unitate al unui spațiu Riesz cu unitate tare. Fiind strâns conectat cu analiza funcțională, logica  $\mathbb{R}\mathcal{L}$  permite și demonstrarea unei teoreme de completitudine de tip Pavelka. De asemenea, cu ajutorul formulelor logicii  $\mathbb{R}\mathcal{L}$  putem reprezenta o clasă de rețele neurale.

În Capitolul 5 prezentăm un sistem logic, a cărui teoremă de formă normală poate fi interpretată ca o variantă locală a conjecturii Pierce-Birkhoff [7]. Această conjectură este încă deschisă, iar soluțiile parțiale cunoscute până în prezent aparțin geometriei algebrice. Informal, era cunoscut faptul că logica Łukasiewicz cu produs este legată de conjectura Pierce-Birkhoff. Rezultatul nostru oferă o expresie matematică acestei legături. Deși versiunea locală ar putea fi la fel de greu de dovedit, rezultatul nostru poate oferi o perspectivă nouă, deoarece este enunțat în cadrul unui sistem accesibil de calcul propozițional.

Teoriile prezentate anterior sunt unificate în Capitolul 6. Utilizând produsul tensorial definit în teoria MV-algebrelor [112], toate clasele de MV-algebre cu produs sunt prezentate într-un cadru unitar și sunt conectate prin functori adjunți.

A doua direcție de cercetare prezentată în această teză aparține teoriei probabilităților. Logica Łukasiewicz surprinde aspecte incerte atât în reprezentarea evenimentelor ca formule cu valori în intervalul real  $[0, 1]$ , dar și la nivelul teoriei probabilităților: putem vorbi despre probabilitatea unui eveniment multi-valent. MV-algebrele au un caracter dual: ele sunt atât generalizări ale algebrelor Boole, dar pot fi reprezentate și ca intervale unitate în grupuri abeliene laticial ordonate cu unitate tare. Acest aspect este reflectat și de teoria probabilităților: teoria stărilor corespunde stărilor definite pe grupuri laticiale, în timp ce teoria MV-algebrelor probabiliste este o generalizare a teoriei probabilităților definite pe algebre Boole. În Capitolul 7 definim noțiunea de *MV-algebre probabiliste stochastic independente*, propunând o soluție pentru o problemă deschisă enunțată de B. Riečan și D. Mundici [121]. Rezultatul final al acestei secțiuni combină două rezultate: construcția completării unei MV-algebre în raport cu metrica indusă de o stare și dualitatea dintre o clasă de Riesz MV-algebre probabiliste și o categorie de spații cu măsură topologice.

În Capitolul 8 abordăm cea de-a treia direcție de cercetare: logicile  $n$ -valente și algebrele lor. Gr.C. Moisil a fost primul care a considerat, în 1940, o abordare algebrică a logicii Łukasiewicz  $n$ -valente. Pentru  $n \geq 5$  structurile definite cu de Moisil, numite acum *algebre*

*Lukasiewicz-Moisil*, nu corespund logicii Łukasiewicz, ci definesc un sistem nou: logica Moisil [8]. Principala caracteristică a abordării lui Moisil este *principiul determinării*: un eveniment multi-valent este unic caracterizat de o secvență de evenimente Booleene. După introducerea structurilor algebrice, prezentăm o generalizare a principiului determinării, demonstrată în [81] (lucrare distinsă cu premiul "Grigore Moisil" al Academiei Române). Drept consecință, obținem un nou tip de dualitate Stone prin care o algebră Łukasiewicz-Moisil  $n$ -valentă este unic caracterizată de un spațiu Boolean și o secvență finită de mulimi deschise. Rezultatele obținute sunt specializate la  $MV_n$ -algebre, structurile asociate logicii Łukasiewicz  $n$ -valente, care sunt echivalente cu o subclasă proprie de algebre Łukasiewicz-Moisil. În final prezentăm rezultate recente, prin care abordăm semantica logicii Moisil  $n$ -valente folosind teoria jocurilor.

Ultimul capitol este dedicat direcțiilor de cercetare viitoare.

Începând cu octombrie 2015, Ioana Leuştean este directorul unui grant de cercetare CNCS - UEFISCDI (grant pentru constituirea de tinere echipe independente). Proiectul are drept obiectiv analiza aspectelor incerte cu ajutorul unei teorii matematice bazate pe logicile cu mai multe valori în general, și pe logica Łukasiewicz în special. În cadrul acestui proiect abordăm subiecte din logică, algebră, teoria probabilității dar și direcții noi, în special probleme de verificare formală. Obiectivele acestui proiect fac parte din direcțiile de dezvoltare viitoare. Propunem și alte probleme noi, scopul nostru principal fiind de a demonstra că sistemele pe care le-am dezvoltat pot fi folosite într-un cadru concret, nu numai pentru a reprezenta cunoașterea imprecisă, graduală, parțială, dar și pentru a face deducții cu privire la date incerte.