

UNIVERSITY OF BUCHAREST

HABILITATION THESIS

**Aspects of Classical and Free
Probability**

Ionel Popescu

Specialization: Mathematics

2016

Rezumat

Ma consider un probabilist in particular si un analist in general. Arrile de cercetare in care sunt interesat contin analiza stochastica pe varietati, matrici aleatoare si probabilitati libere.

Teza de doctorat a avut ca subiect inegalitatile Morse folosind tehnici de probabilitati. Aceasta idee a fost initiata de Witten si are la baza idea ca data fiind o functie Morse sau o functie Bott-Morse, putem construi pe baza acestora un complex De-Rham cu diferenciala $d^\alpha = e^{\alpha h} d e^{-\alpha h}$. Punand o metrice Riemanniana pe varietate, putem construi operatorul $\square^\alpha = (d^\alpha + \delta^\alpha)^2$ care este cunoscut ca laplacianul Witten unde δ^α este adjunctul lui d^α . Acum lasand α sa tinda la infinit, obtinem un complex definit in termeni de punctele critice ale lui h . Acesta idee am transpus-o in practice folosind metode de probabilitati.

Ricci flow este foarte cunoscut pentru contributia la rezolvarea conjecturii Poincare precum si pentru progresul pe care l-a adus in conjectura geometrizarii. Acest flow, ca de altfel si altele (de exemplu mean curvature flow) sunt interpretate ca o ecuatie a caldurii pentru metrica pe varietate si deci ar trebui sa aiba o interpretare probabilista. Unul din aspectele Ricci flow este ca tinde sa rotunjeasca metrica la o metrica de curbura constanta. De exemplu pe suprafete, Ricci flow normalizat nu are singularitati in timp iar la infinit converge la o metrica de curbura constanta. Impreuna cu Rob Neel am reusit sa dam o demonstratie probabilistica acestui fapt, demonstrand ca de fapt convergenta are loc pentru toate derivatele sale si convergenta este exponentiala. Anumite aspecte din aceasta lucrare imbunatatesc rezultatele din literatura geometrica iar abordarea noastra va conduce la noi rezultate si dezvoltari in probabilitati ca de altfel si geometrie. Este primul astfel de rezultat in care probabilitatile joaca un rol esential in demonstratie si aduce o alternativa complet diferita celei standard folosite de geometri.

Unul din instrumentele probabilistice din geometrie si analiza este cuplajul de miscari Browniene. Pe varietati, unul din cele mai folosite cuplajele cu o multitudine de aplicatii in probleme analitice si geometrice este cuplajul Cranston-Kendall numit in literatura si cuplajul de reflexie in oglinda. Acest cuplaj forteaza intalnirea celor doua miscari in timp finit. Pe de alta parte, Burdzy si colaboratorii au introdus o alta notiune de cuplaj numit "shy coupling" in care cele doua miscari Browniene stau departe una de alta. De exemplu, pe domenii convexe (fara bucati de frontiera liniare) nu exista cuplaje de miscari Browniene reflectate. Pe varietati Riemanniene cu $Ric \geq 0$, impreuna cu Mihai Pascu, am construit astfel de "shy couplings" si mai mult, cuplaje care stau la distanta fixa tot timpul. Speram ca aceasta abordare de constructie de cuplaje sa ne duca la rezolvarea conjecturii "Hot Spots" care afirma ca a doua functie proprie Neumann pe un domeniu convex nu are maxime/minime in interior.

O alta directie de cercetare in care sunt interesat este cea legata de probabilitatile libere si in acelasi timp teoria transportului masei. Aceasta ultima directie este la intersectia intre economie, ecuatii cu derivate partiale, geometrie, probabilitati si analiza functionala. Pe de alta parte, probabilitatile libere au fost introduse de Voiculescu din ratiuni legate de algebre de operatori, inasa acum sunt folosite intr-o varietate de domenii, incepand cu matricile aleatoare, inginerie, analiza numerical si chiar finante.

O arie aparte cu o foarte intensiva preocupare este cea a inegalitatilor functionale in probabilitatile clasice, ca de exemplu, inegalitatile Log-Sobolev, izoperimetrice si de

transport care sunt motivate de geometrie, ecuatii cu derivate partiale, procese Markov si lista poate continua. In acest cadru, cateva din inegalitatile functionale in probabilitatile libere apar natural ca limite de inegalitati clasice aplicate matricilor aleatoare. Aceste aproximatii functioneaza numai intr-un numar limitat de cazuri. Singur sau impreuna cu Michel Ledoux am introdus tehnici de transportul masei in acest cadru al probabilitatilor libere care produc demonstratii foarte simple ale acestor inegalitati in multe cazuri cu cele mai bune constante. De asemenea am introdus inegalitatile libere Poincare ce au un caracter putin diferit de cele clasice si retin cate ceva din fenomenul de universalitate al fluctuatiilor matricilor aleatoare.

De asemenea foarte incitant este conceptul de concentrare a masei care in partea clasica este un instrument extrem de util in matematica actuala. In cazul probabilitatilor libere acest fenomen nu este pe deplin clarificat pentru ca in cazul clasic notiunea de refera la o masura, pe cand in cazul liber, nu exista o masura de referinta ci aceasta trebuie inlocuita cu capacitatea logaritmica a multimilor de pe dreapta, ceea ce face analiza mult mai complicata si interesanta in acelasi timp. Mult mai interesant pare sa fie extinderea acestor inegalitati la mai multe variabile, lucru care pare posibil insa mult mai dificil.

Teoria matricilor aleatoare este una care a avut o explozie uimitoare in matematica moderna. Subiectul a fost introdus de fizicieni in incercarea de a intelege interactia intre nucleele grele, inasa acum acopera o vasta arie din matematica moderna, de la combinatoria, sisteme integrabile, statistica, algebre de operatori, teoria numerelor, finante, inginerie etc. Dumitriu si Edelman au introdus modelele tridiagonale pentru asa numitele β -ensembles care in cazul $\beta = 1, 2, 4$ sunt obtinute simplu prin diagonalizarea modelelor clasice de GOE, GUE si GSE. Ei au folosit aceste modele pentru a intelege distributia valorilor proprii pentru modelele clasice exploatand structura tridiagonala. In acest context al matricilor tridiagonale am introdus o generalizare naturala care corespunde cu modelele clasice de asa numitele modele Wigner pentru matricile aleatoare. Aici am studiat distributia limita si fluctuatiile, unde apar fenomene similare cu cele deja studiate, inasa sunt si alte fenomene particulare acestor modele.

Tot in cadrul matricilor aleatoare, impreuna cu Stavros Garoufalidis, am rezolvat o conjectura a lui 't Hoofts despre raza de convergenta a functiei generatoare a diagramelor planare. Acesta topica este foarte activa pentru ca este legata de modelele de teoria topologica a stringurilor din fizica. Abordarea noastra combina elemente destul de elementare de polinoame Chebyshev, combinatorica analitica. Aici avem foarte multe cazuri calculate explicit ce leaga functii algebrice si ecuatii diferentiale pentru functii generatoare.

Impreuna cu Henry Matzinger si alti colaboratori, avem un numar de articole pe alinere optimala. Aceasta arie de cercetare are legaturi foarte stranse cu secventierea ADN-ului si planuiesc sa incep o colaborare mult mai stransa cu biologi care se ocupa de asa ceva unde modelele matematica devin mult mai complicate si fara o intuitie si ghidare a unor experti ce se ocupa de secventiere analiza devine aproape imposibila, sau in cazul fericit rezultatele matematice nu devin aplicabile in realitate.